

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse suivante : <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

## Estudios Matemáticos

### Nivel Medio

### Prueba 2

Miércoles 4 de noviembre de 2020 (mañana)

1 hora 30 minutos

---

#### Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Para esta prueba, se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Estudios Matemáticos NM**.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán darse como valores exactos o con una aproximación de tres cifras significativas.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[90 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar un gráfico de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujarlo aproximadamente en su respuesta.

1. [Puntuación máxima: 19]

Don ha participado en un proyecto donde se midieron la velocidad del viento,  $x \text{ km h}^{-1}$ , y el tiempo,  $y$  minutos, que tardaba en cargarse completamente un robot que funciona con energía solar.

Estas medidas se realizaron seis veces. Los resultados se recogen en la siguiente tabla.

|  |    |    |    |    |    |    |
|--|----|----|----|----|----|----|
| <b>Velocidad del viento, <math>x</math>, (<math>\text{km h}^{-1}</math>)</b> | 6  | 10 | 16 | 24 | 28 | 30 |
| <b>Tiempo, <math>y</math>, (minutos)</b>                                     | 28 | 26 | 30 | 33 | 38 | 37 |

(a) **En un papel milimetrado**, dibuje con precisión un diagrama de dispersión que ilustre los resultados del proyecto de Don. Utilice la siguiente escala: 1 cm para representar 2 unidades en el eje  $x$ , y 1 cm para representar 5 unidades en el eje  $y$ . [4]

(b) Calcule:

(i)  $\bar{x}$ , la velocidad media del viento

(ii)  $\bar{y}$ , el tiempo medio que tardó el robot en cargarse completamente [2]

M es el punto que tiene por coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

(c) Sitúe y rotule el punto M en el diagrama de dispersión. [2]

(d) (i) Calcule el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson,  $r$ .

(ii) Describa la correlación entre la velocidad del viento y el tiempo que tarda el robot en cargarse completamente. [4]

(e) (i) Escriba la ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$  en la forma  $y=mx+c$ .

(ii) Dibuje con precisión esta recta de regresión en el diagrama de dispersión.

(iii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, estime cuál será el tiempo de carga cuando la velocidad del viento sea igual a  $27 \text{ km h}^{-1}$ . [6]

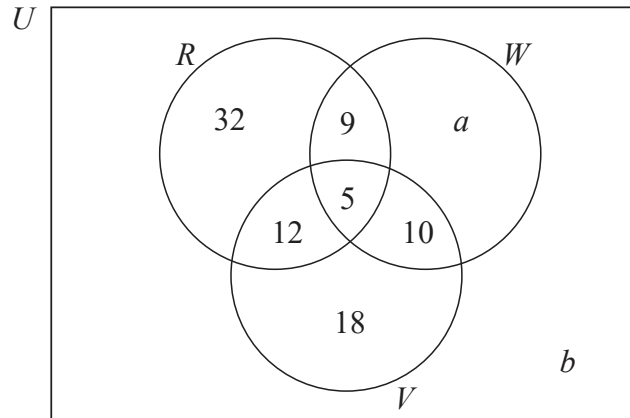
Basándose en su investigación, Don concluyó lo siguiente: “No existe causalidad entre la velocidad del viento y el tiempo que tarda el robot en cargarse completamente”.

(f) En el contexto de la pregunta, explique brevemente el significado de “no existe causalidad”. [1]

2. [Puntuación máxima: 12]

En una excursión escolar, 100 alumnos visitaron un parque de atracciones. Las principales atracciones del parque son las montañas rusas ( $R$ ), los toboganes de agua ( $W$ ), y las atracciones de realidad virtual ( $V$ ).

A los alumnos les preguntaron en cuáles de esas atracciones se habían montado. Los resultados se muestran en el siguiente diagrama de Venn.



Hubo 74 alumnos que se montaron en las montañas rusas o en los toboganes de agua.

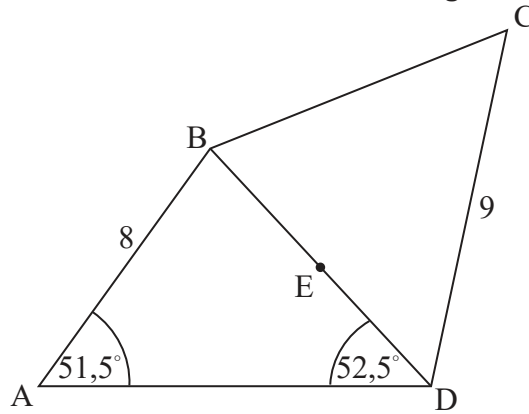
- (a) (i) Halle el valor de  $a$ .
- (ii) Halle el valor de  $b$ . [4]
- (b) Halle el número de alumnos que se montaron al menos en dos tipos distintos de atracciones. [2]
- (c) Escriba el valor de  $n(R \cap W)$ . [1]
- (d) Halle la probabilidad de que un alumno elegido al azar se haya montado en:
  - (i) Las montañas rusas
  - (ii) Las atracciones de realidad virtual [3]
- (e) A partir de lo anterior, determine si los sucesos de los **subpartados (d)(i)** y **(d)(ii)** son independientes. Justifique su razonamiento. [2]

Véase al dorso

3. [Puntuación máxima: 15]

Utilizando un *software* de geometría, Pedro dibuja el cuadrilátero ABCD.  $AB = 8$  cm y  $CD = 9$  cm. El ángulo  $BAD = 51,5^\circ$  y el ángulo  $ADB = 52,5^\circ$ . Todos estos datos se muestran en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



(a) Calcule la longitud de BD. [3]

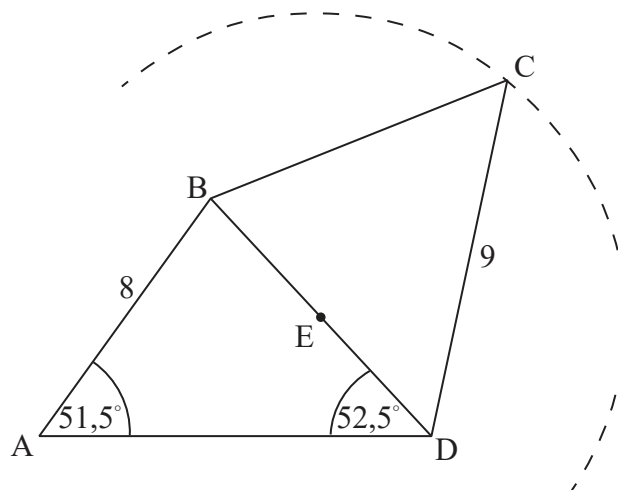
$CE = 7$  cm, donde el punto E es el punto medio de BD.

(b) Muestre que el ángulo  $EDC = 48,0^\circ$ , redondeando a tres cifras significativas. [4]

(c) Calcule el área del triángulo BDC. [3]

Pedro dibuja un círculo, cuyo centro es el punto E y que pasa por el punto C. En la siguiente figura se muestra una parte de este círculo.

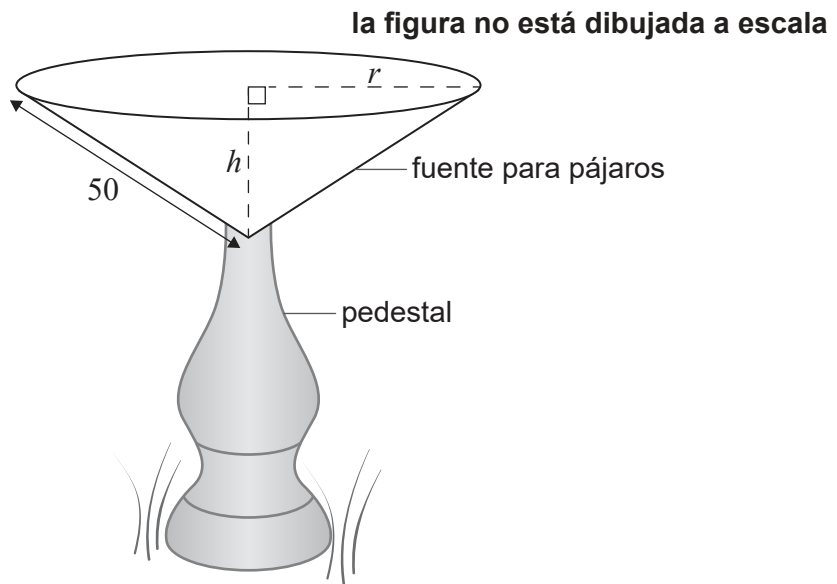
la figura no está dibujada a escala



(d) Muestre que el punto A se encuentra fuera del círculo. Justifique su razonamiento. [5]

4. [Puntuación máxima: 11]

Hyungmin diseña una fuente de cemento para pájaros. Esta fuente para pájaros se apoya en un pedestal, tal y como se muestra en la siguiente figura.



El interior de la fuente para pájaros tiene forma de cono de radio  $r$ , altura  $h$  y longitud de la generatriz constante e igual a 50 cm.

- (a) Escriba una ecuación en función de  $r$  y  $h$  que muestre esta información. [1]

Sea  $V$  el volumen de la fuente para pájaros.

- (b) Muestre que  $V = \frac{2500\pi h}{3} - \frac{\pi h^3}{3}$ . [1]

- (c) Halle  $\frac{dV}{dh}$ . [2]

Hyungmin quiere que su fuente para pájaros tenga un volumen máximo.

- (d) Utilizando la respuesta que ha dado en el apartado (c), halle el valor de  $h$  para el cual  $V$  es máximo. [2]

- (e) Halle el volumen máximo de la fuente para pájaros. [2]

Para evitar que haya fugas, se aplica un material sellador a la superficie interior de la fuente para pájaros.

- (f) Halle el área de la superficie que tiene que cubrir el material sellador, sabiendo que la fuente para pájaros tiene el volumen máximo. [3]

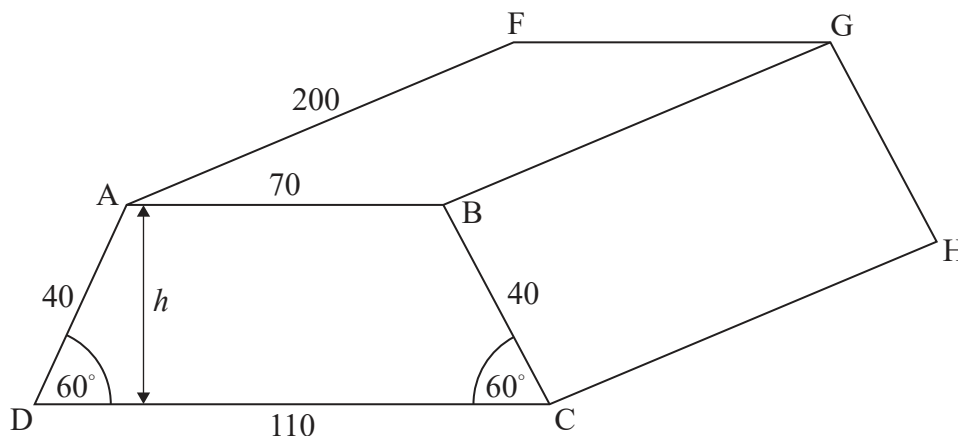
Véase al dorso

5. [Puntuación máxima: 16]

En el aeropuerto Mills se construye un tanque subterráneo de gran tamaño para almacenar combustible. El tanque tiene forma de prisma trapezoidal isósceles, ABCDEFGH.

AB = 70 m, AF = 200 m, AD = 40 m, BC = 40 m y CD = 110 m. El ángulo ADC = 60° y el ángulo BCD = 60°. El tanque aparece representado a continuación.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle la altura del tanque,  $h$ . [2]

(b) Muestre que el volumen del tanque es igual a  $624\,000\text{ m}^3$ , redondeando a tres cifras significativas. [3]

Una vez finalizada la construcción del tanque, se utiliza una bomba de combustible para verter combustible **en el** tanque vacío. La cantidad de combustible que esta bomba vierte en el tanque **cada hora** va disminuyendo según una progresión aritmética cuyos términos son  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ .

Una parte de esta progresión se muestra en la siguiente tabla.

| Hora ( $n$ )  | 1. <sup>a</sup> | 2. <sup>a</sup> | 3. <sup>a</sup> | ... |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----|
| Cantidad de combustible que se vierte en el tanque durante cada hora, en $\text{m}^3$ ( $u_n$ ) | 45 000          | 43 200          | 41 400          | ... |

(c) Escriba el valor de la diferencia,  $d$ . [1]

(d) Halle la cantidad de combustible que se vierte en el tanque durante la 13.<sup>a</sup> hora. [2]

(e) (i) Halle el valor de  $n$  para el cual  $u_n = 0$ .  
 (ii) Escriba el número de horas que la bomba ha estado vertiendo combustible en el tanque. [3]

Al finalizar la 2.<sup>a</sup> hora, el volumen total de combustible que hay en el tanque es igual a  $88\,200\text{ m}^3$ .

(f) Halle la cantidad total de combustible que se vierte en el tanque durante las primeras 8 horas. [2]

(g) Muestre que, si se utiliza esta bomba, el tanque no se acabará de llenar nunca. [3]

6. [Puntuación máxima: 17]

Emlyn juega muchos partidos de baloncesto con el equipo de su colegio. El número de minutos que juega en cada partido sigue una distribución normal de media  $m$  minutos.

En un partido cualquiera hay un 30 % de probabilidades de que juegue menos de 13,6 minutos.

- (a) Dibuje aproximadamente un diagrama donde se represente esta información. [2]

En un partido cualquiera hay un 70 % de probabilidades de que juegue menos de 17,8 minutos.

- (b) Muestre que  $m = 15,7$ . [2]

La desviación típica del número de minutos que juega Emlyn en cada partido es igual a 4.

- (c) Halle la probabilidad de que Emlyn:
- (i) Juegue entre 13 minutos y 18 minutos en un partido dado.
  - (ii) Juegue más de 20 minutos en un partido dado. [4]

Hay un 60 % de probabilidades de que Emlyn juegue menos de  $x$  minutos en un partido dado.

- (d) Halle el valor de  $x$ . [2]

Emlyn va a jugar hoy dos partidos de baloncesto.

- (e) Halle la probabilidad de que juegue entre 13 minutos y 18 minutos en uno de los partidos y más de 20 minutos en el otro partido. [3]

Emlyn y su compañero de equipo Johan entrenan los tiros a canasta desde un punto  $X$ . En la siguiente tabla se muestran los resultados que obtuvo cada uno durante el fin de semana.

|         | Emlyn                      | Johan                      |
|---------|----------------------------|----------------------------|
| Sábado  | 42 canastas de 70 intentos | 16 canastas de 30 intentos |
| Domingo | 27 canastas de 32 intentos | 51 canastas de 68 intentos |

El lunes, Emlyn y Johan van a volver a entrenar y cada uno tirará 200 veces desde el punto  $X$ .

- (f) Halle el número esperado de canastas que meterá Emlyn el lunes, basándose en los resultados del sábado y el domingo. [2]

Emlyn afirma que los resultados del sábado y el domingo muestran que su número esperado de canastas es mayor que el de Johan.

- (g) Determine si la afirmación de Emlyn es correcta. Justifique su razonamiento. [2]